

Projektarbeit: Erdumfangberechnung (mit Konrad Adenauer Gymnasium Bonn 2009)

In einer Kooperation Vermessung und Schulen unterstützt die Abteilung Geobasis NRW der Bezirksregierung Köln mit dem Projekt „Pythagoras lebt!“ einen technikorientierten und praxisnahen Unterricht. Geobasis NRW beteiligt sich damit an der landesweiten Initiative ZdI „Zukunft-durch-Innovation“.

Da Vermessung und Kartographie auf mathematischen, physikalischen und geographischen Grundlagen basiert, lassen sich entsprechende Unterrichtseinheiten praxisnah zu verknüpfen.

Hinsichtlich dieser Thematik gibt es seit diesem Jahr Kontakte zum Konrad Adenauer Gymnasium, wo sich Lehrkräfte schon frühzeitig dazu entschlossen, den Schülern naturwissenschaftliche Themen in praktischer Anwendung näher zu bringen.

Den Anfang machte eine 12. Klasse mit einer Übung aus dem Übungskatalog der Projektbeschreibung.

Aufgabe war es, im Rahmen einer Hausarbeit, mit Hilfe eines bestimmten Messverfahrens den Erdradius, Erdumfang und einen Meridianbogen von 1° zu bestimmen.

Um in der Örtlichkeit diese Aufgabe mit einfachen Mitteln messtechnisch lösen zu können, ist ein Messverfahren erforderlich, nach der die Grundidee von Eratosthenes anwendbar ist.

Eratosthenes wusste schon, dass die Erde eine Kugel ist. Weiter erkannte er, dass die Kugelförmigkeit der Erde, seine Beobachtungen in Syene und Alexandria und seine Kenntnisse von der Parallelität der Sonnenstrahlen, miteinander vereinbar waren.

Aufgrund dessen wusste er, dass der gemessene Schattenwinkel von $7,2^\circ$ des Obeliskens in Alexandria und der Mittelpunktswinkel der Erde als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen gleich sind. Daraus leitete er unter Kenntnis der Entfernung des Großkreisbogens von Syene bis Alexandria mit ca. 800 km (ca. 5000 Stadien) den Erdumfang ab. Dieser lag nach seinen Berechnungen bei 39 375 km was dem Sollmaß von 40 000 km sehr nahe kam.

Basierend auf der Grundidee von Erathostenes sollten die Schüler versuchen, ein ähnliches Ergebnis zu erzielen.

Für die Übung wurde eine Strecke am Rhein erkundet, die bei Sichtfreiheit und geringem Gefälle gute Bedingungen für die Messung liefern sollte.

Diese Übung wurde schon vorher von einer Schulklasse in Würzburg durchgeführt, die sich eines Verfahrens von Ralf Fackiner bedienten. Dieser Hobbyastronom hatte eine Ähnlichkeitssatzlösung entwickelt, die eine Ableitung des Erdradius auch mit kurzer Basis ermöglicht.

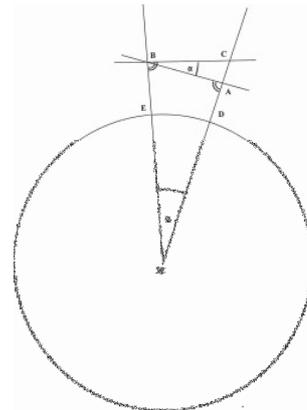
Für die Realisierung bedient man sich Vermessungsinstrumente, welche die Bedingungen der horizontalen Visur mit senkrechtem Bezug zum Erdradius erfüllen. Dazu gehören Nivelliergeräte aber auch z.B. Tachymeter.

Damit soll es nun möglich sein, durch den Einfluss Erdkrümmung, den Erdradius und damit den Erdumfang abzuleiten.

Diese theoretischen Erkenntnisse sind in der Übung zur praktischen Anwendung gekommen.

Bei dieser Prinzipskizze ist die Ähnlichkeitsfigur ersichtlich. Danach wird von A aus der Punkt B in der Verlängerung des Radius ME festgelegt. Ein zweiter Strahl von B aus schneidet in C die Verlängerung des Radius MD. Damit ist die Ähnlichkeitsfigur komplett. Es ergibt sich also ein Dreieck ABC. Das Dreieck ist ähnlich zum Dreieck CBM und damit auch zum Dreieck ABM. Es zeigt sich also, dass der Winkel α bei B mit dem Mittelpunktswinkel μ bei M übereinstimmt. Somit lässt sich nach dem Ähnlichkeitssatz $AC/AB = AB/MA$ die Strecke AC ableiten. Aufgrund der Tatsache, dass der Mittelpunktswinkel und die Basis im Verhältnis zu den Erddimensionen sehr klein sind, können die Strecken AB und DE gleichgesetzt werden.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MA}} \Rightarrow \overline{MA} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}} \Rightarrow r = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}}$$



Das zur Theorie. Wie hat es in der Praxis funktioniert?

Dazu wurde in A ein Nivelliergerät aufgebaut und in B ein Tachymeter eingerichtet, sodann in A auf einer in unmittelbarer Nähe stehenden Nivellierlatte abgelesen. Zeitgleich wurde von B aus auf der gleichen Latte abgelesen. Man erhielt so die Differenz AC.

Mit dem Tachymeter wird der Winkel α zwischen CA gemessen. Ebenso das direkte Maß in A.

Die ganze Messprozedur wurde in umgekehrter Reihenfolge wiederholt.

Wichtig für die Genauigkeitssteigerung:

Aufgrund der Refraktionseinflüsse auf den Zielstrahl müssen die abgelesene Werte korrigiert werden :

$$c = ks^2 / 2r$$

s = Basis AB

r = 6371 km (Referenzwert)

k = Refraktionskoeffizient = 0,13

2. Möglichkeit

$$\text{Es gilt: } U_{Erde} = \frac{360^\circ}{\alpha} \cdot b_{AS} \cdot$$

3. Möglichkeit

Erdumfang = $2r \pi$

Ergebnisse KAG:

AC	Radius	Erdumfang	
0,410	6892	43304	
0,464	6090	38265	
0,435	6496	40816	
0,441	6408	40260	
0,446	6332	39784	
0,486	5816	36541	
0,447 m	6339 km	39828 km	Mittelwerte
0,026	366	2302	Stabw
0,443	6372,8	40041,5	Mittelwerte (Soll)